وزارت علوم تحقیقات و فناوری
دانشگاه صنعتی سیرجان

مکانیک خاک پیشرفته

فصل ۴. مسیر تنش در خاک

دکتر علیرضا غنی‌زاده

استادیار دانشکده مهندسی عمران-دانشگاه صنعتی سیرجان

http://civil.sirjantech.ac.ir/~ghanizadeh

مستقل‌های تنش

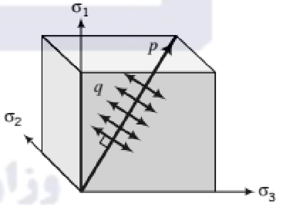
تنش میانگین

$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

تنش برشی یا انحرافی

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2}$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}}\{[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2] + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{yz}^2 + 6\tau_{zx}^2\}^{1/2}$$



مستقل‌های کرنش

کرنش حجمی

$$\varepsilon_p = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

کرنش برشی یا انحرافی یا اعوجاج

$$\varepsilon_q = \frac{\sqrt{2}}{3}[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2]^{1/2}$$

http://civil.sirjantech.ac.ir/~ghanizadeh

مستقل‌های تنش و کرنش در حالت تقارن محوری

در وضعیت تقارن محوری داریم: $\sigma'_2 = \sigma'_3 \text{ or } \sigma_2 = \sigma_3;\ \varepsilon_2 = \varepsilon_3$

$$p' = \frac{\sigma'_1 + 2\sigma'_3}{3} \quad \text{and} \quad p = \frac{\sigma_1 + 2\sigma_3}{3}$$

$$p' = p - u$$

$$q = \sigma_1 - \sigma_3; \quad q' = \sigma'_1 - \sigma'_3 = (\sigma_1 - \Delta u) - (\sigma_3 - \Delta u) = \sigma_1 - \sigma_3$$

با توجه به $q=q'$، برش یا تنش انحرافی تحت تاثیر فشار منافذ قرار نگرفته است.

$$\varepsilon_p = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_3$$

$$\varepsilon_q = \frac{2}{3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)$$

مستقل‌های تنش و کرنش در حالت کرنش مسطح

کرنش صفحه‌ای، $\varepsilon_2=0$.

$$p' = \frac{\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3'}{3} \quad \text{and} \quad p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

$$p' = p - u$$

$$q' = q = \frac{1}{\sqrt{2}}[(\sigma_1' - \sigma_2')^2 + (\sigma_2' - \sigma_3')^2 + (\sigma_3' - \sigma_1')^2]^{1/2}$$

or

$$q = q' = \frac{1}{\sqrt{2}}[(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2}$$

$$\varepsilon_p = \varepsilon_1 + \varepsilon_3$$

$$\varepsilon_q = \frac{2}{3}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_3^2 - \varepsilon_1\varepsilon_3)^{1/2}$$

قانون هوک با استفاده از مستقل‌های تنش و کرنش

رابطه بین مستقل‌های تنش و کرنش به شرح زیر می‌باشد:

$$\varepsilon_p^e = \frac{1}{K'}p'$$

که

$$K' = \frac{p'}{\varepsilon_p^e} = \frac{E'}{3(1 - 2\nu')}$$

پارامتر فوق نشان دهنده مدول حجمی مؤثر و اندیس **e** نشان دهنده الاستیک است.

$$\varepsilon_q^e = \frac{1}{3G}q \qquad G = G' = \frac{E'}{2(1 + \nu')}$$

پارامتر **G** مدول برشی نامیده می‌شود.

قانون هوک در مورد تنش و کرنش یکسان به نظر می رسد.

$$\begin{Bmatrix} p' \\ q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K' & 0 \\ 0 & 3G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_p^e \\ \varepsilon_q^e \end{Bmatrix}$$

تعیین ضریب پواسن با توجه به مدول حجمی و مدول برشی

$$\text{Equation (8.18):}\quad E' = 3K'(1 - 2\nu')$$

$$\text{Equation (8.20):}\quad E' = 2G(1 + \nu')$$

$$\therefore \frac{3K'(1 - 2\nu')}{2G(1 + \nu')} = 1$$

$$\nu' = \frac{3K' - 2G}{2G + 6K'}$$

مثال ۱

یک نمونهٔ استوانه‌ای از خاک به قطر ۵۰ mm و طول ۱۰۰ mm تحت اثر تنش محوری اصلی مؤثر برابر با ۴۰۰ kPa و تنش شعاعی اصلی مؤثر برابر با ۱۰۰ kPa قرار گرفته است. تغییر مکان‌های محوری و شعاعی به ترتیب برابر با ۰/۵ mm و ۰/۰۴- mm می‌باشند. با فرض اینکه خاک یک ماده الاستیک ایزوتروپ باشد، مطلوب است محاسبه (a) تنش‌های متوسط و انحرافی (b) کرنش‌های حجمی و برشی و (c) مدول الاستیک حجمی و برشی.

مثال ۱

گام ۱: تنش های متوسط و انحرافی را محاسبه می‌کنیم.

(a)

$$\sigma'_1 = \sigma'_z = 400\ \text{kPa}, \quad \sigma'_3 = \sigma'_r = 100\ \text{kPa}$$

$$p' = \frac{\sigma'_z + 2\sigma'_r}{3} = \frac{400 + 2 \times 100}{3} = 200\ \text{kPa}$$

$$q = q' = \sigma'_z - \sigma'_r = 400 - 100 = 300\ \text{kPa}$$

گام ۲: کرنش های برشی و حجمی را حساب می‌کنیم.

(b)

$$\Delta z = 0.5\ \text{mm}, \quad \Delta r = -0.04\ \text{mm}, \quad r = 50/2 = 25\ \text{mm}, \quad L = 100\ \text{mm}$$

مثال ۱

$$\varepsilon_z = \varepsilon_1 = \frac{\Delta z}{L} = \frac{0.5}{100} = 0.005$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_3 = \frac{\Delta r}{r} = \frac{-0.04}{25} = -0.0016$$

$$\varepsilon_p^e = \varepsilon_z + 2\varepsilon_r = 0.005 - 2 \times 0.0016 = 0.0018 = 0.18\%$$

$$\varepsilon_q^e = \frac{2}{3}(\varepsilon_z - \varepsilon_r) = \frac{2}{3}(0.005 + 0.0016) = 0.0044 = 0.44\%$$

(c)

گام ۳: محاسبه مدول

$$K' = \frac{p'}{\varepsilon_p^e} = \frac{200}{0.0018} = 111{,}111\ \text{kPa}$$

$$G = \frac{q}{3\varepsilon_q^e} = \frac{300}{3 \times 0.0044} = 22{,}727\ \text{kPa}$$

مثال ۱

ولی

$$G = \frac{E'}{2(1+\nu')} \quad \text{and} \quad \nu' = \frac{3K' - 2G}{2G + 6K'} = \frac{3 \times 111{,}111 - 2 \times 22{,}727}{2 \times 22{,}727 + 6 \times 111{,}111} = 0.4$$

$$\therefore E' = 2G(1+\nu') = 2 \times 22{,}727(1 + 0.4) = 63{,}636 \text{ kPa}$$

مسیر تنش کل

$$\Delta\sigma_1 = \Delta\sigma_2 = \Delta\sigma_3$$

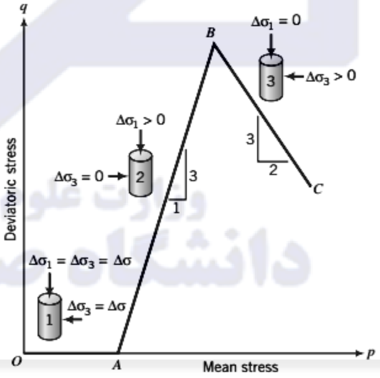
$$\Delta p_1 = \frac{\Delta\sigma_1 + 2\Delta\sigma_3}{3} = \frac{\Delta\sigma_1 + 2\Delta\sigma_1}{3} = \Delta\sigma_1$$

$$\Delta q_1 = \Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3 = \Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_1 = 0$$

$$p_1 = p_o + \Delta p_1 = 0 + \Delta\sigma_1 = \Delta\sigma_1$$

$$q_1 = q_o + \Delta q_1 = 0 + 0 = 0$$

$$\frac{\Delta q_1}{\Delta p_1} = 0$$



مسیر تنش کل

$\Delta\sigma_3 = 0 \qquad \Delta\sigma_1 > 0$

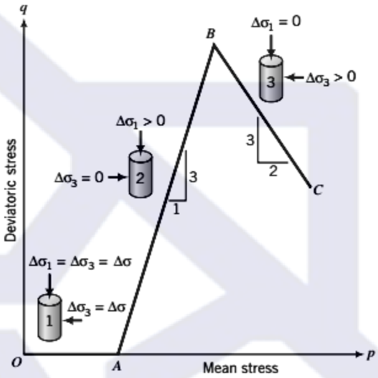
$$\Delta p_2 = \frac{\Delta\sigma_1 + 2\times 0}{3} = \frac{\Delta\sigma_1}{3}$$

$$\Delta q_2 = \Delta\sigma_1 - 0 = \Delta\sigma_1$$

$$p_2 = p_1 + \Delta p_2 = \Delta\sigma_1 + \frac{\Delta\sigma_1}{3} = \frac{4}{3}\Delta\sigma_1$$

$$q_2 = q_1 + \Delta q_2 = 0 + \Delta\sigma_1 = \Delta\sigma_1$$

$$\frac{\Delta q_2}{\Delta p_2} = \frac{\Delta\sigma_1}{(\Delta\sigma_1/3)} = 3$$



مسیر تنش کل

$(\Delta\sigma_1 = 0) \quad (\Delta\sigma_3 > 0)$

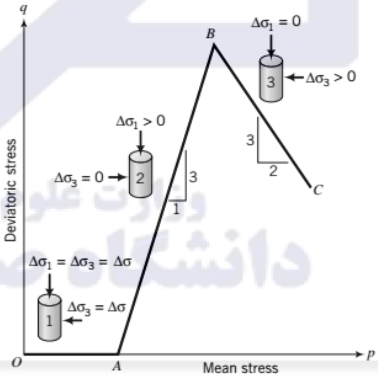
$$\Delta p_3 = \frac{0 + 2\Delta\sigma_3}{3} = \frac{2\Delta\sigma_3}{3}$$

$$\Delta q_3 = 0 - \Delta\sigma_3 = -\Delta\sigma_3$$

$$p_3 = p_2 + \Delta p_3 = \frac{4}{3}\Delta\sigma_1 + \frac{2}{3}\Delta\sigma_3$$

$$q_3 = q_2 + \Delta q_3 = \Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3$$

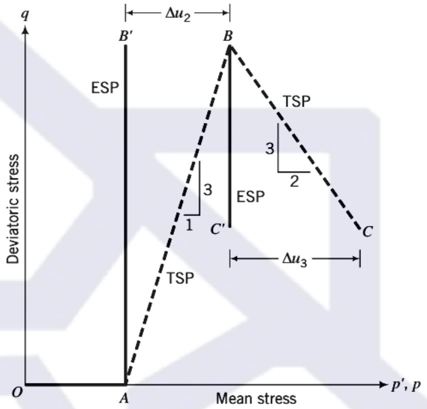
$$\frac{\Delta q_3}{\Delta p_3} = \frac{-\Delta\sigma_3}{\frac{2}{3}\Delta\sigma_3} = -\frac{3}{2}$$



مسیر تنش مؤثر – مرحله اول بارگذاری – تحکیم ایزوتروپیک

$$\Delta\sigma_1 = \Delta\sigma_2 = \Delta\sigma_3$$

$$\Delta p_1' = \Delta p_1 - \Delta u_1 = \Delta p_1 - 0 = \Delta p$$


q
Δu_2
B′
B
ESP
TSP
3
2
3
1
ESP
C′
C
Δu_3
TSP
Deviatoric stress
O
A
Mean stress
p′, p

http://civil.sirjantech.ac.ir/~ghanizadeh

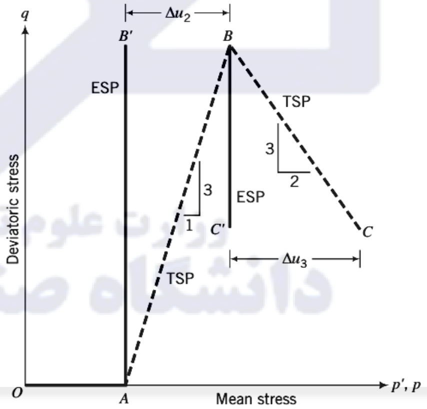
مسیر تنش مؤثر – مرحله دوم بارگذاری – برش زهکشی نشده

$$\Delta\sigma_1 = \Delta\sigma_2 = \Delta\sigma_3$$

$$\Delta\varepsilon_p^e = \frac{\Delta p'}{K'} = 0 \qquad \Delta p' = 0$$

$$\Delta\varepsilon_p^e = \frac{\Delta p}{K} = 0 \qquad K = K_u = \infty$$

$$K = E_u/3(1 - 2\nu_u) \qquad \nu_u = 0.5$$


q
Δu_2
B′
B
ESP
TSP
3
2
3
1
ESP
C′
C
Δu_3
TSP
Deviatoric stress
O
A
Mean stress
p′, p

مسیر تنش مؤثر – مرحله دوم بارگذاری– برش زهکشی نشده

1. تغییر در تنش مؤثر میانگین صفر است و در نتیجه، مسیر تنش مؤثر قائم است.
2. مدول حجمی زهکشی نشده بی نهایت است و $v_u=0.5$.

$$G = G_u = \frac{E_u}{2(1+v_u)}$$

از آنجا که $G=G_u=G'$، پس

$$\frac{E_u}{2(1+v_u)} = \frac{E'}{2(1+v')}$$

و با جایگزین کردن $v_u=0.5$، به دست می آوریم

$$E_u = \frac{1.5E'}{(1+v')}$$

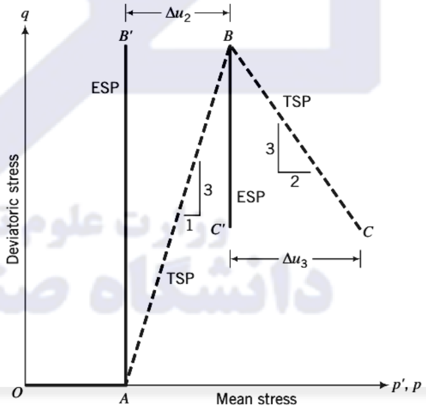
برای بسیاری از خاک‌ها، $v'{\sim}1/3$ و به عنوان یک نتیجه $E_u{\sim}1/1E'$

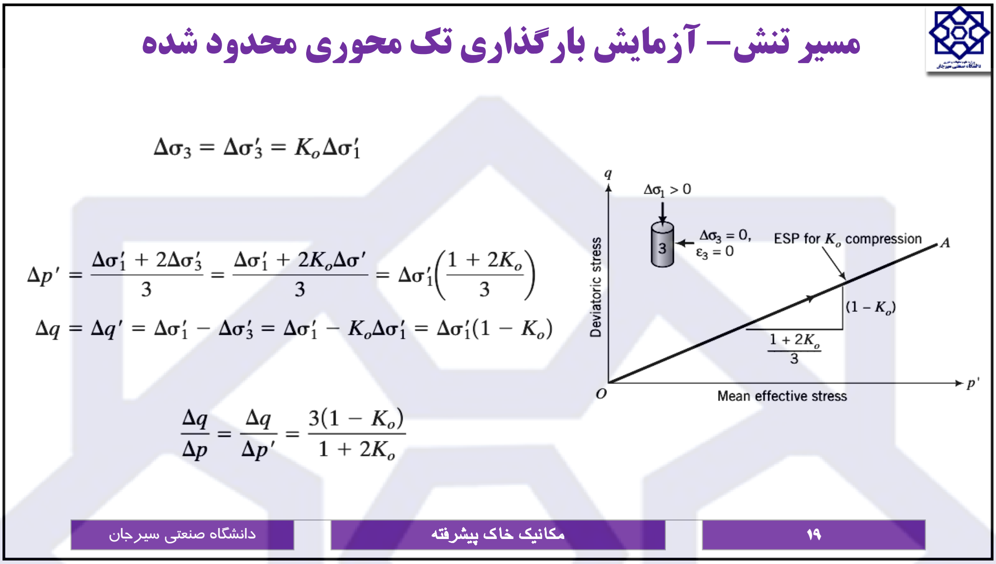
مسیر تنش مؤثر – مرحله دوم بارگذاری– برش زهکشی نشده

$$p_2' = p_1' + \Delta p_2' = p_1' + 0 = \Delta\sigma_1$$

$$q_2 = q_1 + \Delta q_2 = 0 + \Delta\sigma_1 = \Delta\sigma_1$$

$$\Delta u_2 = p_2 - p_2' = \frac{4}{3}\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_1 = \frac{1}{3}\Delta\sigma_1$$





مسیر تنش– آزمایش بارگذاری تک محوری محدود شده

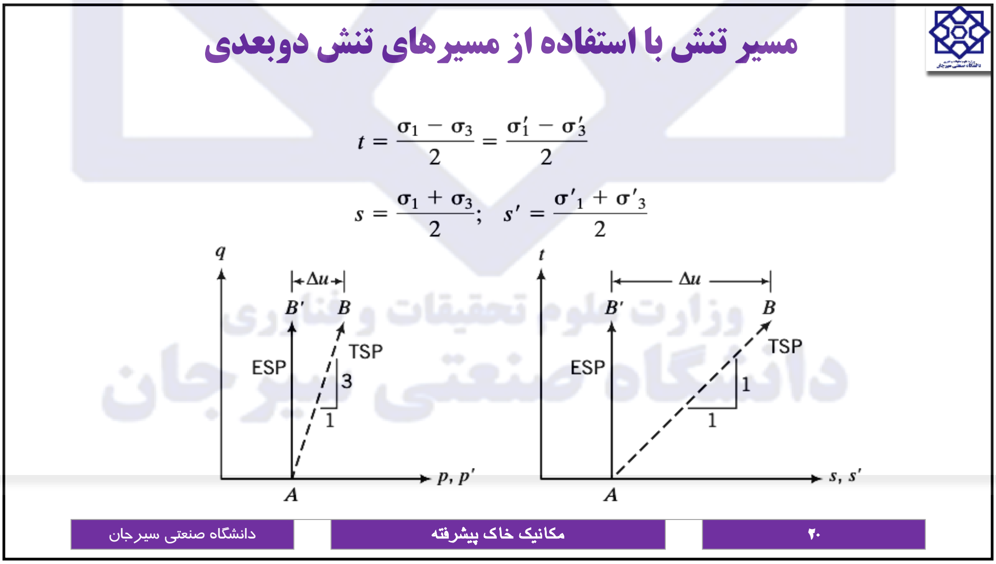
$$\Delta\sigma_3 = \Delta\sigma'_3 = K_o\Delta\sigma'_1$$

$$\Delta p' = \frac{\Delta\sigma'_1 + 2\Delta\sigma'_3}{3} = \frac{\Delta\sigma'_1 + 2K_o\Delta\sigma'}{3} = \Delta\sigma'_1\left(\frac{1 + 2K_o}{3}\right)$$

$$\Delta q = \Delta q' = \Delta\sigma'_1 - \Delta\sigma'_3 = \Delta\sigma'_1 - K_o\Delta\sigma'_1 = \Delta\sigma'_1(1 - K_o)$$

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{\Delta q}{\Delta p'} = \frac{3(1 - K_o)}{1 + 2K_o}$$

q
$\Delta\sigma_1 > 0$
3
$\Delta\sigma_3 = 0,$
$\varepsilon_3 = 0$
ESP for K_o compression
A
$(1 - K_o)$
$\frac{1 + 2K_o}{3}$
Deviatoric stress
O
Mean effective stress
p'



مسیر تنش با استفاده از مسیرهای تنش دوبعدی

$$t = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{2}$$

$$s = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}; \quad s' = \frac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2}$$

q
Δu
B'
B
ESP
TSP
3
1
A
p, p'
t
Δu
B'
B
ESP
TSP
1
1
A
s, s'

مثال ۲

دو نمونهٔ استوانه‌ای A و B از خاکی به صورت زیر بارگذاری شده است. هر دو نمونه ایزوتروپ، تحت شرایط زهکشی‌شده با تنش ۲۰۰ kPa بارگذاری شده‌اند. تحت شرایط زهکشی‌نشده تنش شعاعی وارده بر نمونهٔ A ثابت نگه داشته‌شده و تنش محوری تدریجاً به ۴۴۰ kPa افزایش داده شده است. در نمونهٔ B، تحت شرایط زهکشی‌شده، تنش محوری ثابت نگه داشته شده و تنش شعاعی تدریجاً به ۵۰ kPa کاهش داده شده است. مسیرهای تنش کل و مؤثر را برای هر یک از نمونه‌ها با فرض اینکه خاک، ماده الاستیک ایزوتروپ خطی است، ترسیم کنید. حداکثر اضافه فشار آب حفره‌ای را در نمونهٔ A محاسبه کنید.

مثال ۲

گام ۱: شرایط بارگذاری را تعیین می کنیم.
بارگذاری دارای تقارن محوری است و هر دو شرایط زهکشی شده و زهکشی نشده وجود دارند.

گام ۲: مستقل‌های اولیه تنش را برای مسیر بارگذاری ایزوتروپ محاسبه می کنیم. برای بارگذاری ایزوتروپ با تقارن محوری تحت شرایط زهکشی شده، $\Delta u=0$

$$\Delta p' = \frac{\Delta\sigma_a' + 2\Delta\sigma_r'}{3} = \frac{\Delta\sigma_1' + 2\Delta\sigma_1'}{3} = \Delta\sigma_1' = 200\ \text{kPa}$$

$$P_0=P'_0=200\ \text{kPa}$$

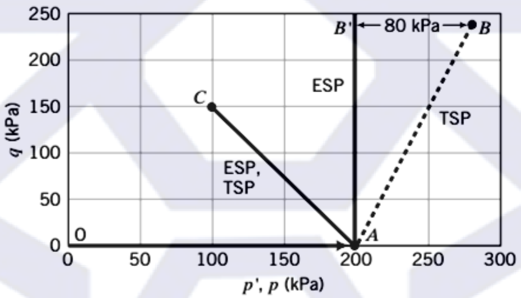
چون نمونه های خاک از وضعیت بدون تنش تحت شرایط زهکشی شده بارگذاری شده اند.

$$q_o = q_o' = 0$$

مثال ۲

گام ۳: نمودار را ترسیم و نقاط تنش اولیه را پیاده می‌کنیم.

محورهای مختصاتی با محور افقی **P’** و **P** و محور قائم **q** و مسیر تنش ایزوتروپ با مختصات (۰،۰)، (۰، ۲۰۰) را که به وسیلهء **OA** در شکل زیر نشان داده شده است پیاده می کنیم.



مثال ۲

گام ۴: افزایش تنش ها را تعیین می کنیم.

نمونه **A**

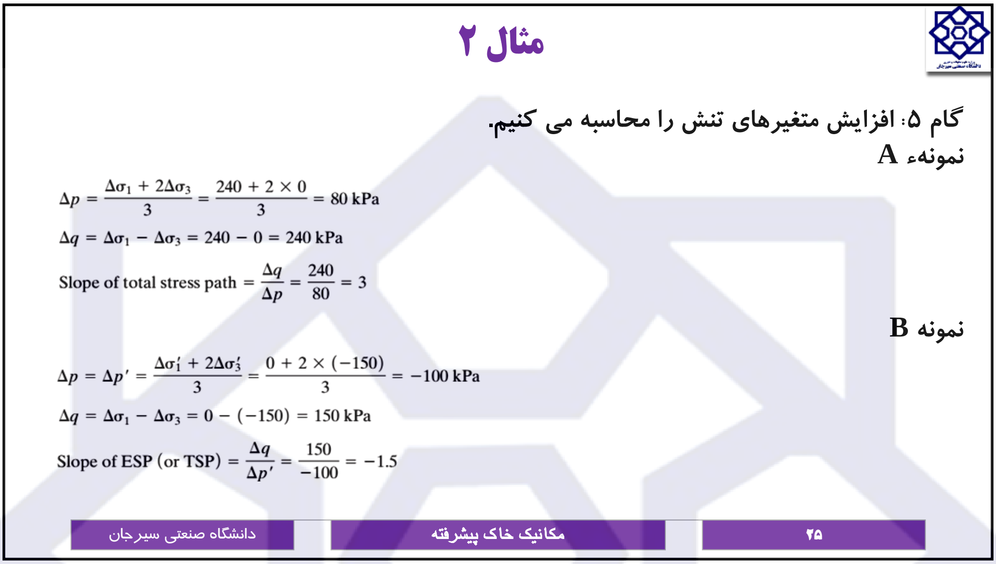
اولاً شرایط زهکشی نشده داریم پس Δu غیر صفر است و ثانیاً تغییری در تنش شعاعی وجود ندارد و تنش محوری تا ۴۰۰ **kPa** افزایش می یابد، بنابراین

$$\Delta\sigma_3 = 0, \quad \Delta\sigma_1 = 440 - 200 = 240\ \text{kPa}$$

نمونه **B**

بارگذاری زهکشی شده است و داریم **Δu=0** و بنابراین **TSP=ESP**. همچنین تنش محوری ثابت نگه داشته می شود($\Delta\sigma_1 = \Delta\sigma_1' = 0$) و تنش شعاعی به ۵۰ **kPa** کاهش می یابد یعنی:

$$\Delta\sigma_3 = \Delta\sigma_3' = 50 - 200 = -150\ \text{kPa}$$



مثال ۲

گام ۵: افزایش متغیرهای تنش را محاسبه می کنیم.

نمونه A

$$\Delta p = \frac{\Delta\sigma_1 + 2\Delta\sigma_3}{3} = \frac{240 + 2 \times 0}{3} = 80 \text{ kPa}$$

$$\Delta q = \Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3 = 240 - 0 = 240 \text{ kPa}$$

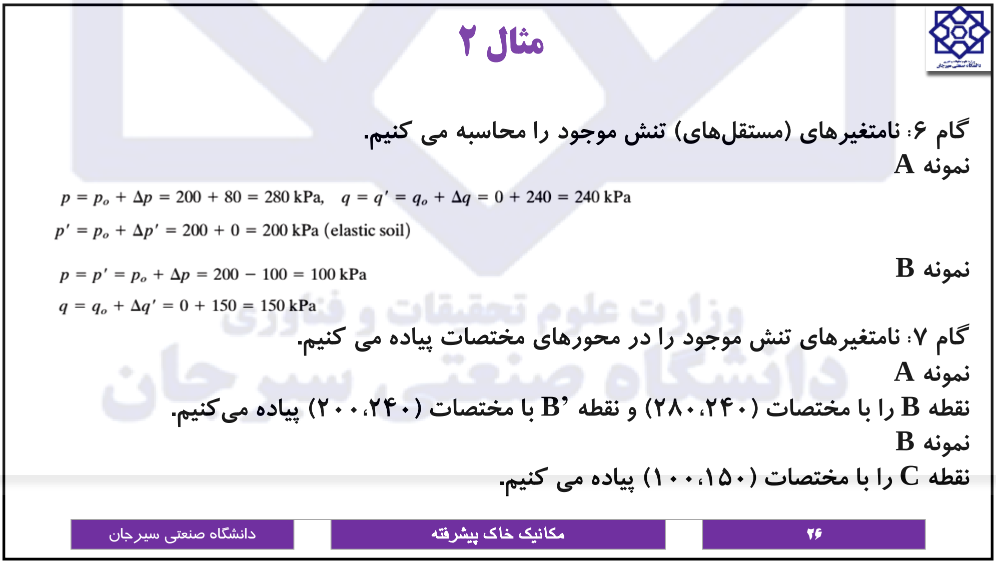
$$\text{Slope of total stress path} = \frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{240}{80} = 3$$

نمونه B

$$\Delta p = \Delta p' = \frac{\Delta\sigma_1' + 2\Delta\sigma_3'}{3} = \frac{0 + 2 \times (-150)}{3} = -100 \text{ kPa}$$

$$\Delta q = \Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3 = 0 - (-150) = 150 \text{ kPa}$$

$$\text{Slope of ESP (or TSP)} = \frac{\Delta q}{\Delta p'} = \frac{150}{-100} = -1.5$$



مثال ۲

گام ۶: نامتغیرهای (مستقل‌های) تنش موجود را محاسبه می کنیم.

نمونه A

$$p = p_o + \Delta p = 200 + 80 = 280 \text{ kPa}, \quad q = q' = q_o + \Delta q = 0 + 240 = 240 \text{ kPa}$$

$$p' = p_o + \Delta p' = 200 + 0 = 200 \text{ kPa (elastic soil)}$$

نمونه B

$$p = p' = p_o + \Delta p = 200 - 100 = 100 \text{ kPa}$$

$$q = q_o + \Delta q' = 0 + 150 = 150 \text{ kPa}$$

گام ۷: نامتغیرهای تنش موجود را در محورهای مختصات پیاده می کنیم.

نمونه A

نقطه B را با مختصات (۲۸۰،۲۴۰) و نقطه B’ با مختصات (۲۰۰،۲۴۰) پیاده می‌کنیم.

نمونه B

نقطه C را با مختصات (۱۰۰،۱۵۰) پیاده می کنیم.

مثال ۲

گام ۸: نقاط تنش را به هم وصل می‌کنیم.

نمونه A

AB در شکل مسیر تنش کل و **AB’** مسیر تنش مؤثر را نشان می‌دهد.

نمونه B

AC در شکل، **ESP** و **TSP** را نشان می‌دهد.

گام ۹: اضافه فشار آب حفره‌ای را تعیین می‌کنیم.

نمونه A

BB’ حداکثر فشار آب حفره‌ای را نشان می‌دهد. متوسط اختلاف تنش برابر ۲۸۰-۲۰۰=۸۰ **kpa** می‌باشد.